Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
Факультет математики і інформатики
Кафедра прикладної математики

Кваліфікаційна робота

освітньо-кваліфікаційний рівень: ***бакалавр***

на тему ***«Побудова базисів вільних алгебр Лі та їх застосування для однорідної апроксимації нелінійних керованих систем.»***

Виконав: студент групи МП41 IV курсу
(перший бакалаврський рівень),
спеціальності 113
"Прикладна математика"
освітньої програми
"Прикладна математика"
Блотницький М.В.
Керівник: доктор фіз.-мат. наук,
професор кафедри
прикладної математики
Ігнатович С.Ю.
Рецензент: кандидат фіз.-мат. наук,
науковий співробітник
Фізико-технічного інституту
низьких температур
ім. Б.І.Вєркіна НАН України
Бархаєв П.Ю.

Харків — 2024 рік

Анотації

Блотницький М.В. Побудова базисів вільних алгебр Лі та їх застосування для однорідної апроксимації нелінійних керованих систем.

Дипломну роботу присвячено дослідженню нелінійної системи з керуванням без зсуву.

У роботі розглянуто отримання формули Вітта для розмірності вільної алгебри Лі, метод побудови базису в таких алгебрах і запропоновано використання цьогьо алгоритму в задачі однорідної апроксимації.

Ключові слова: нелінійні керовані системи без зсуву, базис Холла, однорідна апроксимація, алгоритм побудови апроксимуючої системи.

Blotnytskyi M.V. Construction of bases of free Lie algebras and their application for homogeneous approximation of nonlinear control systems.

The diploma thesis deals with the study of nonlinear driftless control systems.

The work presents the derivation of the Witt's formula for the dimension of a free Lie algebra and a method for constructing a basis in these algebras. The work also proposes the use of this algorithm in the problem of homogeneous approximation.

Keywords: nonlinear driftless control systems, Hall basis, homogeneous approximation, algorithm for constructing an approximating system.

Зміст

Вступ

В роботі розглядається система з керуванням без зсуву, яка є лінійною за керуванням, але не є лінійною за координатою.

В теорії таких систем важливу роль відіграють вільні алгебри Лі та алгебри Лі векторних полів, тому їх алгебраїчні властивості можуть бути використані для дослідження керованості, а також для побудови однорідної апроксимації керованих систем без зсуву.

Робота розділена на три розділи. В першому розділі розглядаються дужки Лі векторних полів системи без зсуву і їхній зв'язок з керованістю такої системи. В другому розділі визначається вільна алгебра Лі, виводиться формула Вітта для розмірності такої алгебри і наводиться її приклад. В третьому розділі розглядається поняття базису Холла вільної алгебри Лі, наводиться алгоритм побудови такого базису і його застосування в задачі однорідної апроксимації.

Розділ 1
Алгебра Лі векторних полів для керованої системи без зсуву

Розглянемо систему з керуванням без зсуву

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} X_i(x)u_i,$$

де кожний $X_i(x)$ це векторне поле. Також вважаємо що множина допустимих керувань B містить деякий відкритий окіл нуля.

В роботі [10] запропоновано означення *розподілу* множини векторних полів $X_i(x)$. Зафіксуємо деяку точку простору q. Векторні поля $X_i(q)$ в цій точці утворюють систему векторів, а множина їхніх лінійних комбінацій утворює підпростір, розмірність якого дорівнює кількості лінійно незалежних серед векторів $X_i(q)$.

Означення 1.1. Розподілом набору векторних полів $\{X_i\}_{i=1}^{m}$ називають сукупність таких підпросторів для кожної точки q. Його позначають

$$\Delta = span\{X_1, X_2, \dots, X_m\}.$$

Тепер розглянемо систему лише з двома векторними полями

$$\dot{x} = f(x)u_1 + g(x)u_2$$

і керуванням на відрізку $[0, 4\Delta t]$ вигляду

$$u(t) = \begin{cases} (1,0), & t \in [0, \Delta t) \\ (0,1), & t \in [\Delta t, 2\Delta t) \\ (-1,0), & t \in [2\Delta t, 3\Delta t) \\ (0,-1), & t \in [3\Delta t, 4\Delta t] \end{cases}$$

Нехай на деякому відрізку $\dot{x} = X(x)$. Якщо взяти похідну і підставити у вираз початкове рівняння, отримаємо

$$\ddot{x} = \frac{dX}{dt} = \frac{\partial X}{\partial x}\dot{x} = \frac{\partial X}{\partial x}X(x)$$

Скористаємося цим виразом щоб з'ясувати як впливає рух під дією даного керування на положення системи. Випишемо розкладання координати в ряд Тейлора.

$$\begin{aligned} x(\Delta t) &= x(0) + \Delta t \dot{x}(0) + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \ddot{x}(0) + \dots = \\ &= x(0) + \Delta t f(x(0)) + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x(0)} f(x(0)) + \dots \end{aligned}$$

Проведемо таку саме операцію з трьома іншими відрізками

$$x(2\Delta t) = x(\Delta t) + \Delta t g(x(\Delta t)) + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{x(\Delta t)} g(x(\Delta t)) + \dots$$
$$x(3\Delta t) = x(2\Delta t) - \Delta t f(x(2\Delta t)) + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x(2\Delta t)} f(x(2\Delta t)) + \dots$$
$$x(4\Delta t) = x(3\Delta t) - \Delta t g(x(3\Delta t)) + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{x(3\Delta t)} g(x(3\Delta t)) + \dots$$

Послідовно підставляючи вирази один в інший, отримуємо:

$$x(4\Delta t) = x(0) + (\Delta t)^2 \big(\frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{x(0)} f(x(0)) - \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x(0)} g(x(0)) \big) + \dots$$

Звідси маємо

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(4\Delta t) - x(0)}{(\Delta t)^2} = (\frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g)$$

Ми показали, що окрім пересування вздовж векторних полів f і g, за допомогою наведеного керування систему можна зсунути вздовж векторного поля $\frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g$. Також можна помітити що такий вираз задовольняє властивостям дужки Лі:

1. $[f, f] = 0$
2. $[f, g] = -[g, f]$
3. $\big[[f, g], h\big] + \big[[g, h], f\big] + \big[[h, f], g\big] = 0$

Означення 1.2. Дужкою Лі векторних полів f та g називають наступний вираз:

$$[f, g] = \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g = g' f - f' g = f \circ g - g \circ f = fg - gf$$

Означення 1.3. Розподіл набору векторних полів

$$\Delta = span\{X_1, X_2, \ldots, X_m\}$$

називають інволютивним, якщо дужки Лі його векторних полів можна отримати лінійною комбінацією цих векторних полів.

$$\forall X_i, X_j \ \exists \{C_i\}_{i=1}^m \in \mathbb{R} : \ [X_i, X_j] = \sum_{i=1}^m C_i X_i$$

Також у роботі [10] наведено дві наступні теореми, які пов'язують лінійну незалежність дужок Лі та керованість:

Теорема 1.4. *(Фробеніус) Система є інволютивною тоді і тільки тоді, коли вона є повністю інтегровною.*

Тобто в цьому випадку обмеження, задане системою, можна переписати без похідних. Таке обмеження розшаровуватиме простір на поверхні, «вивести» точку з кожної з цих поверхонь неможливо.

Теорема 1.5. *(Чжоу, Рашевський) Система є локально керованою за маленький час в точці x тоді і тільки тоді, коли розмірність алгебри Лі векторних полів, породжених векторними полями системи в цій точці, дорівнює розмірності простору*

$$dim(L_x(\Delta)) = n$$

Локальна керованість в точці x за маленький час означає, що для будь-якого проміжку часу існує окіл точки x, з будь-якої точки якого можна потрапити в x за цей час.

Розділ 2
Вільні алгебри і формула для їхніх розмірностей

В процесі розгляду алгебр Лі векторних полів є важливим пов'язане з ними поняття вільної алгебри Лі.

2.1. Означення і отримання формули

Нехай $\mathcal{F}$ - вільна асоціативна алгебра слів з літер скінченного алфавіту $A = \{\eta_1, \eta_2, ..., \eta_m\}$ і лінійних комбінацій таких слів. Очевидно, ця алгебра є прямою сумою підпросторів лінійних комбінацій слів довжини k, які ми позначатимемо $\mathcal{F}^k$. Розмірність кожного такого підпростору $dim(\mathcal{F}^k) = m^k$. Також нехай операція дужок Лі від елементів алгебри a і b визначена як $[a, b] = ab - ba$. Тоді підмножина алгебри $\mathcal{F}$, породжена дією дужок Лі на алфавіті $\{\eta_1, \eta_2, ..., \eta_m\}$ та інших елементах цієї множини утворюють вільну алгебру Лі L, яку розглянуто в роботах [1–3]. Визначимо поняття порядку елемента Лі. Нехай всі елементи алфавіту матимуть порядок 1, а порядок елементів, отриманих як дужка від двох інших дорівнюватиме сумі порядків цих елементів.

Таку алгебру також можна розбити в пряму суму підпросторів лінійних комбінацій елементів порядку k, але знайти розмірності таких підпросторів вже дещо складніше. Окрім примітивних лінійних залежностей на кшталт $\big[[a, b], c\big] = \big[c, [b, a]\big]$, породжених антикомутативністю, серед елементів алгебри зустрічаються досить нетривіальні залежності, які є наслідком тотожності Якобі. Наприклад такі:

$$\Big[\big[[a,b],a\big],[a,b]\Big]=\Big[\Big[\big[[a,b],a\big],a\Big],b\Big]-\Big[\Big[\big[[a,b],b\big],a\Big],a\Big]$$

.

Виведемо *формулу Вітта* для розмірності підпросторів елементів алгебри Лі порядку k з *теореми Пуанкаре-Біркгофа-Вітта* [6].

Теорема 2.1. *(Пуанкаре, Біркгоф, Вітт) Нехай $\{l_1, l_2, l_3, ...\}$ - деякий впорядкований базис L, причому якщо порядок елемента l_m менше порядку елемента l_n, то $m < n$. Тоді скінченні добутки елементів l_i, такі що послідовності номерів цих елементів в базисі є неспадними, утворюють базис у вільній асоціативній алгебрі $\mathcal{F}$.*

$$\mathcal{F} = Lin\{\, l_{i_1} l_{i_2} ... l_{i_r} \mid i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_r\}$$

З теореми Пуанкаре-Біркгофа-Вітта маємо:

$$\mathcal{F}^k = Lin\{\, l_{i_1} l_{i_2} ... l_{i_r} \mid i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_r,\ p_1 + 2p_2 + ... + kp_k = k\},$$

де p_j - кількість елементів l_i порядку j.

Тоді виконується рівність для розмірностей:

$$dim(\mathcal{F}^k) = dim(Lin\{\, l_{i_1} l_{i_2} ... l_{i_r} \mid i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_r,\ p_1 + 2p_2 + ... + kp_k = k\})$$

Оскільки кількість послідовностей базисних елементів l_i з неспадаючими індексами довжини p_j порядку j дорівнює $\binom{p_j + s_j - 1}{p_j}$, рівність переписується наступним чином:

$$m^k = \sum_{p_1 + 2p_2 + ... + kp_k = k} \prod_{j=1}^{k} \binom{p_j + s_j - 1}{p_j}$$

При $k = 1, 2, 3...$ ліва і права частини рівняння утворюють послідовності. Застосуємо для них породжувальну функцію:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k m^k = \sum_{k=1}^{\infty} x^k \sum_{p_1+2p_2+...+kp_k=k} \prod_{j=1}^{k} \binom{p_j + s_j - 1}{p_j}$$

$$\frac{1}{1-mx} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} x^k \sum_{p_1+2p_2+...+kp_k=k} \prod_{j=1}^{k} \binom{p_j + s_j - 1}{p_j}$$

Помітимо, що праву частину можна переписати наступним чином:

$$\frac{1}{1-mx} = \prod_{i=1}^{\infty} \sum_{p_j=0}^{\infty} x^{ip_j} \binom{p_j + s_i - 1}{p_j}$$

Як зазначено в [7], $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{n} y^n = (1-y)^{-r}$. Якщо застосувати це до нашого виразу, отримаємо наступне:

$$\frac{1}{1-mx} = \prod_{i=1}^{\infty} (1-x^i)^{-s_i}$$

Прологарифмуємо:

$$ln(1-mx) = ln \prod_{i=1}^{\infty} (1-x^i)^{s_i}$$

$$ln(1-mx) = \sum_{i=1}^{\infty} s_i ln(1-x^i)$$

Візьмемо похідні за x і наведемо подібні:

$$\frac{-m}{1-mx} = \sum_{i=1}^{\infty} s_i \frac{-ix^{i-1}}{1-x^i}$$

$$\frac{mx}{1-mx} = \sum_{i=1}^{\infty} is_i \frac{x^i}{1-x^i}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} m^n x^n = \sum_{i=1}^{\infty} is_i \sum_{k=1}^{\infty} x^{ik}$$

Правий ряд можна переписати наступним чином:

$$\sum_{n=1}^{\infty} m^n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sum_{i|n} is_i$$

Звідси маємо рівність коефіцієнтів ряду (для $n \in \mathbb{N}$):

$$m^n = \sum_{i|n} is_i$$

Застосувавши обернення Мьобіуса, отримуємо формулу Вітта:

$$s_i = \frac{1}{i} \sum_{d|i} \mu(d) m^{\frac{i}{d}}$$

2.2. Приклад базису вільної алгебри Лі

Нехай алфавіт складається з двох літер: $\{a, b\}$. Розглянемо відповідну вільну алгебру Лі і підрахуємо розмірності її підпросторів різного порядку за допомогою формули Вітта.

Для перших трьох підпросторів базиси складаються з усіх можливих нетривіальних дужок відповідної довжини (з точністю до порядку елементів в дужках):

$$L^1 = Lin\{a, b\} \qquad dim(L^1) = s_1 = \frac{1}{1} \sum_{d|1} \mu(d) 2^{\frac{1}{d}} = 2$$

$$L^2 = Lin\{[a, b]\} \qquad dim(L^2) = s_2 = \frac{1}{2} \sum_{d|2} \mu(d) 2^{\frac{2}{d}} = 1$$

$$L^3 = Lin\{\big[[a, b], a\big], \big[[a, b], b\big]\} \quad dim(L^3) = s_3 = \frac{1}{3} \sum_{d|3} \mu(d) 2^{\frac{3}{d}} = 2$$

Для підпростору елементів четвертого порядку

$$\Big[[[a,b],b],a\Big] = \Big[[[a,b],a],b\Big] = -aabb + 2abab - 2baba + bbaa,$$

тому маємо два способи зібрати з дужок базис:

$$L^4 = Lin\{\Big[[[a,b],a],a\Big], \Big[[[a,b],b],b\Big], \Big[[[a,b],b],a\Big]\} =$$
$$= Lin\{\Big[[[a,b],a],a\Big], \Big[[[a,b],b],b\Big], \Big[[[a,b],a],b\Big]\}$$

$dim(L^4) = \dfrac{1}{4}\sum\limits_{d|4}\mu(d)2^{\frac{4}{d}} = 3$

Оскільки дужки п'ятого порядку можуть містити в собі

$$\Big[[[a,b],b],a\Big] = \Big[[[a,b],a],b\Big],$$

а також

$$\Big[[[a,b],a],[a,b]\Big] = \Big[\Big[[[a,b],a],a\Big],b\Big] - \Big[\Big[[[a,b],b],a\Big],a\Big]$$

і

$$\Big[[[a,b],b],[a,b]\Big] = \Big[\Big[[[a,b],a],b\Big],b\Big] - \Big[\Big[[[a,b],b],b\Big],a\Big],$$

базис в L^5 може бути представлений багатьма різними способами. Наприклад, так:

$$L^5 = Lin\{\Big[\Big[[[a,b],a],a\Big],a\Big], \Big[\Big[[[a,b],a],a\Big],b\Big], \Big[[[a,b],a],[a,b]\Big],$$
$$\Big[[[a,b],b],[a,b]\Big], \Big[\Big[[[a,b],b],b\Big],a\Big], \Big[\Big[[[a,b],b],b\Big],b\Big]\}$$

Розмірність простору L^5 знову можна отримати за формулою: $dim(L^5) = \dfrac{1}{5}\sum\limits_{d|5}\mu(d)2^{\frac{5}{d}} = 6$

Розділ 3
Базис Холла, його побудова і використання у задачі однорідної апроксимації

3.1. Дерева Холла

Незважаючи на те, що ми отримали формулу для розмірності вільної алгебри Лі, ми не знаємо як побудувати в алгебрі базис. Для цього розглянемо поняття *дерева Холла.*

Розглянемо алфавіт A і множину $M(A)$ бінарних дерев, листям яких є елементи алфавіту A. Порядком дерева називатимемо кількість його листя. Кожне дерево, порядок якого більше одиниці може бути записане у вигляді $t = [t', t'']$, де t' та t'' його праве те ліве піддерево відповідно. Також нехай на множині дерев $M(A)$ задано деяке відношення порядку $\preceq$. У роботі [8] було запропоноване наступне означення:

Означення 3.1. Підмножину дерев $H \in M(A)$ називають множиною Холла, якщо вона містить алфавіт A і для її елементів $t = [t', t'']$ виконуються три наступні властивості:

1. $t \prec t''$ для кожного $t = [t', t'']$ порядку ≥ 2
2. t' і t'' належать до множини і $t' \prec t''$
3. t' є літерою або ж $t' = [k', k'']$ і $t'' \preceq k''$

3.2. Приклад побудови множини Холла

У роботі [8] було наведено приклад такої множини. Розглянемо як її можна було отримати.

Нехай алфавіт складається з двох літер: $A = \{a, b\}$, і нехай на породженій множині бінарних дерев встановлено деяке відношення порядку $\preceq$ таке, що виконується умова 1 : $t \prec t''$. Побудуємо дерева Холла до 5 порядку.

Нехай $a \prec b$.

(i) Деревами першого порядку будуть літери: a, b.

(ii) Дерев другого порядку в цьому випадку всього 4: $[a, a]$, $[a, b]$, $[b, a]$ та $[b, b]$. Але деревом Холла з них може бути тільки $[a, b]$, адже воно єдине задовільняє умові 2: $a \prec b$. Також таке дерево задовільняє умові 3: $[a, b]' = a$ - літера. Тоді $[a, b]$ є деревом Холла і, з умови 1, $[a, b] \prec [a, b]'' = b$, тобто:

$$[a, b] \prec a \prec b$$

$$\text{або } a \prec [a, b] \prec b,$$

$$\text{але не } a \prec b \prec [a, b].$$

Покладемо у нас $[a, b] \prec a \prec b$

(iii) Знайдемо дерева Холла порядку 3. Умова 2 виконується для двох елементів: $\big[[a, b], a\big]$ і $\big[[a, b], b\big]$.

Елемент $\big[[a, b], a\big]$ задовольняє умову 3, оскільки

$$\big[[a, b], a\big]'' = a \preceq b = \big(\big[[a, b], a\big]'\big)''.$$

З умови 1: $\big[[a, b], a\big] \prec a$

Елемент $\big[[a,b],b\big]$ задовольняє умову 3, оскільки

$$\big[[a,b],b\big]'' = b \preceq b = \big(\big[[a,b],b\big]'\big)''.$$

З умови 1: $\big[[a,b],b\big] \prec b$

Покладемо $\underline{\big[[a,b],a\big]} \prec [a,b] \prec \underline{\big[[a,b],b\big]} \prec a \prec b.$

(iv) Знайдемо дерева Холла порядку 4. Щоб перебрати усі дерева, для яких виконується умова 2, фіксуватимемо ліве піддерево і перебиратимемо всі праві піддерева, які за відношенням порядку більші лівого піддерева і в сумі дають потрібний порядок. Отримали чотири елементи: $\Big[\big[[a,b],a\big],a\Big]$, $\Big[\big[[a,b],a\big],b\Big]$, $\Big[\big[[a,b],b\big],a\Big]$ і $\Big[\big[[a,b],b\big],b\Big]$

Елемент $\Big[\big[[a,b],a\big],a\Big]$ задовольняє умову 3, оскільки

$$\Big[\big[[a,b],a\big],a\Big]'' = a \preceq a = \Big(\Big[\big[[a,b],a\big],a\Big]'\Big)''.$$

З умови 1: $\Big[\big[[a,b],a\big],a\Big] \prec a.$

Елемент $\Big[\big[[a,b],a\big],b\Big]$ не задовольняє умову 3, оскільки

$$\Big[\big[[a,b],a\big],b\Big]'' = b \npreceq a = \Big(\Big[\big[[a,b],a\big],b\Big]'\Big)''.$$

Він не буде деревом Холла.

Елемент $\Big[\big[[a,b],b\big],a\Big]$ задовольняє умову 3, оскільки

$$\Big[\big[[a,b],b\big],a\Big]'' = a \preceq b = \Big(\Big[\big[[a,b],b\big],a\Big]'\Big)''.$$

З умови 1: $\Big[\big[[a,b],b\big],a\Big] \prec a.$

Елемент $\Big[\big[[a,b],b\big],b\Big]$ задовольняє умову 3, оскільки

$$\Big[\big[[a,b],b\big],b\Big]'' = b \preceq b = \Big(\Big[\big[[a,b],b\big],b\Big]'\Big)''.$$

З умови 1: $\Big[\big[[a,b],b\big],b\Big] \prec b$.

Покладемо $\big[[a,b],a\big] \prec \underline{\Big[\big[[a,b],a\big],a\Big]} \prec [a,b] \prec \underline{\Big[\big[[a,b],b\big],a\Big]} \prec \big[[a,b],b\big] \prec a \prec \underline{\Big[\big[[a,b],b\big],b\Big]} \prec b$.

(v) Щоб знайти дерева Холла порядку 5 використаємо алгоритм з попереднього пункту. Дерева, для яких виконується умова 2:

$$\Big[\big[[a,b],a\big],[a,b]\Big], \Big[\Big[\big[[a,b],a\big],a\Big],a\Big], \Big[\Big[\big[[a,b],a\big],a\Big],b\Big], \Big[[a,b],\big[[a,b],b\big]\Big],$$
$$\Big[\Big[\big[[a,b],b\big],a\Big],a\Big], \Big[\Big[\big[[a,b],b\big],a\Big],b\Big], \Big[a,\Big[\big[[a,b],b\big],b\Big]\Big], \Big[\Big[\big[[a,b],b\big],b\Big],b\Big]$$

Перевіримо для них умову 3.

Елемент $\Big[\big[[a,b],a\big],[a,b]\Big]$ задовольняє умову 3, оскільки

$$\Big[\big[[a,b],a\big],[a,b]\Big]'' = [a,b] \preceq a = \Big(\Big[\big[[a,b],a\big],[a,b]\Big]'\Big)''.$$

З умови 1: $\Big[\big[[a,b],a\big],[a,b]\Big] \prec [a,b]$.

Елемент $\Big[\Big[\big[[a,b],a\big],a\Big],a\Big]$ задовольняє умову 3, оскільки

$$\Big[\Big[\big[[a,b],a\big],a\Big],a\Big]'' = a \preceq a = \Big(\Big[\Big[\big[[a,b],a\big],a\Big],a\Big]'\Big)''.$$

З умови 1: $\Big[\Big[\big[[a,b],a\big],a\Big],a\Big] \prec a$.

Елемент $\Big[\Big[\big[[a,b],a\big],a\Big],b\Big]$ не задовольняє умову 3, оскільки

$$\Big[\Big[\big[[a,b],a\big],a\Big],b\Big]'' = b \not\preceq a = \Big(\Big[\Big[\big[[a,b],a\big],a\Big],b\Big]'\Big)''.$$

Він не буде деревом Холла.

Елемент $\Big[[a,b],\big[[a,b],b\big]\Big]$ задовольняє умову 3, оскільки

$$\Big[[a,b],\big[[a,b],b\big]\Big]'' = \big[[a,b],b\big] \preceq b = \Big(\Big[[a,b],\big[[a,b],b\big]\Big]'\Big)''.$$

З умови 1: $\Big[[a,b],\big[[a,b],b\big]\Big] \prec \big[[a,b],b\big]$

Елемент $\Big[\Big[\big[[a,b],b\big],a\Big],a\Big]$ задовольняє умову 3, оскільки

$$\Big[\Big[\big[[a,b],b\big],a\Big],a\Big]'' = a \preceq a = \Big(\Big[\Big[\big[[a,b],b\big],a\Big],a\Big]'\Big)''.$$

З умови 1: $\Big[\Big[\big[[a,b],b\big],a\Big],a\Big] \prec a.$

Елемент $\Big[\Big[\big[[a,b],b\big],a\Big],b\Big]$ не задовольняє умову 3, оскільки

$$\Big[\Big[\big[[a,b],b\big],a\Big],b\Big]'' = b \not\preceq a = \Big(\Big[\Big[\big[[a,b],b\big],a\Big],b\Big]'\Big)''.$$

Він не буде деревом Холла.

Елемент $\Big[a,\Big[\big[[a,b],b\big],b\Big]\Big]$ задовольняє умову 3, оскільки

$$\Big[a,\Big[\big[[a,b],b\big],b\Big]\Big]' = a$$

є літерою.

З умови 1: $\Big[a,\Big[\big[[a,b],b\big],b\Big]\Big] \prec \Big[\big[[a,b],b\big],b\Big].$

Елемент $\Big[\Big[\big[[a,b],b\big],b\Big],b\Big]$ задовольняє умову 3, оскільки

$$\Big[\Big[\big[[a,b],b\big],b\Big],b\Big]'' = b \preceq b = \Big(\Big[\Big[\big[[a,b],b\big],b\Big],b\Big]'\Big)''.$$

З умови 1: $\Big[\Big[\big[[a,b],b\big],b\Big],b\Big] \prec b.$

Покладемо

$$\underline{\Big[\Big[\big[[a,b],a\big],a\Big],a\Big]} \prec \underline{\big[[[a,b],a],[a,b]\big]} \prec [[a,b],a] \prec \big[[[a,b],a],a\big] \prec$$
$$\prec [a,b] \prec \underline{\big[[a,b],[[a,b],b]\big]} \prec \big[[[a,b],b],a\big] \prec [[a,b],b] \prec \underline{\Big[\Big[\big[[a,b],b\big],a\Big],a\Big]} \prec$$
$$\prec a \prec \underline{\Big[a,\big[[[a,b],b],b\big]\Big]} \prec \big[[[a,b],b],b\big] \prec \underline{\Big[\Big[\big[[a,b],b\big],b\Big],b\Big]} \prec b\ .$$

Цей процес можна продовжувати далі.

Слід зазначити, що на момент перевірки умови 3 для елемента $\Big[\Big[\big[[a,b],a\big],a\Big],b\Big]$ вже було відомо, що деревом Холла є елемент $\big[[[a,b],a],[a,b]\big]$, який має те саме листя

$$f\Big(\Big[\Big[\big[[a,b],a\big],a\Big],b\Big]\Big) = abaab = f\Big(\big[[[a,b],a],[a,b]\big]\Big).$$

Тоді, за теоремою 2.3, яка наведена у роботі [8] і стверджує, що два дерева Холла не можуть мати однакове листя, елементи не можуть одночасно бути деревами Холла. Тобто умову 3 можна було не перевіряти.

3.3. Базис Холла

Базис Холла можна розглядати як частковий випадок множини Холла. З цього випливає, що базис Холла володіє усіма властивостями множини Холла.

Означення 3.2. Послідовність $\{l_1, l_2, l_3, ...\}$ елементів вільної алгебри Лі називають базисом Холла, якщо для неї виконуються наступні властивості:

1. Першими m її членами є алфавіт $\{\eta_1, \eta_2, ..., \eta_m\}$
2. Якщо порядок елементів $ord(l_m) < ord(l_n)$, то $m < n$
3. Елемент $[l_m, l_n]$ належить до базису якщо l_m і l_n належать до базису і $m < n$
4. Елемент $[l_m, l_n]$ належить до базису якщо l_n є літерою або ж $l_n = [l_p, l_q]$ і $p \le m$

В роботі [4] було доведено, що базис Холла дійсно є базисом вільної алгебри Лі. Щоб побудувати базис Холла можна використовувати алгоритм, наведений для дерев Холла.

3.4. Базис вільної алгебри Лі в задачі однорідної апроксимації

Базис Холла може бути використаний для побудови однорідної апроксимації керованої системи, яка розглядається в роботі [12].

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} X_i(x) u_i,$$

де X_i - векторні поля,

$$u \in B^\theta = \{u(t) = (u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t)) : |u_i(t)| \le 1\}.$$

Також у роботі [12] вводиться оператор, що керуванню ставить у відповідність кінець траєкторії системи, що почалася в нулі

$$\mathcal{E}(\theta, u) = x(\theta),\ u(t) \in B^{\theta}.$$

Можна показати, що оператор допускає розкладання в ряд Флісса:

$$\mathcal{E}(\theta, u) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i_r \in \{1,2,\ldots,m\}} c_{i_1,i_2,\ldots,i_k} \eta_{i_1,i_2,\ldots,i_k}(\theta, u),$$

де

$$\eta_{i_1,i_2,\ldots,i_k}(\theta, u) = \int_0^{\theta} \int_0^{\tau_1} \cdots \int_0^{\tau_{k-1}} \prod_{j=1}^{k} u_{i_j}(\tau_j) d\tau_k \ldots d\tau_1$$

- ітеровані інтеграли,

$$c_{i_1,i_2,\ldots,i_k} = X_{i_k} \circ X_{i_{k-1}} \circ \cdots \circ X_{i_1} \circ E(0)$$

- векторні коефіцієнти.

Розглянемо алгебру Лі L, породжену комутатором $[l_1, l_2] = l_1 l_2 - l_2 l_1$ на елементах $\{\eta_1, \eta_2, ..., \eta_m\}$ як на алфавіті. Розкладення вище ставить у відповідність кожному $\eta_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$ коефіцієнт $c_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$. Позначимо таку відповідність функцією $c(\eta_{i_1,i_2,\ldots,i_k}) = c_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$.

В процесі побудови апроксимації, наведеному у роботах [11, 12], зустрічається необхідність будувати коефіцієнти від базисних елементів вільної алгебри L. Для цього в алгоритмі для кожного підпростору L^k перебираються m^k дужок вигляду $\left[\eta_{i_1}, \left[\eta_{i_2}, \ldots [\eta_{i_{k-1}}, \eta_{i_k}] \ldots\right]\right]$, з яких беруться тільки лінійно незалежні, від яких потім обчислюються коефіцієнти $c([\eta_{i_1}, \ldots])$. Об'єм обчислень можна скоротити, якщо замість цього будувати коефіцієнти від елементів базису Холла, яких, як було показано, значно менше ніж m^k. Самі елементи базису Холла можна отримувати з алгоритму, наведеного для дерев Холла.

Також в статтях [11, 12] наведено посилання на програмну імплементацію цього алгоритму: https://github.com/ViktorRusakov/happy-control. Інтеграцію в програму використання базису Холла варто розпочати з узагальнення функції *lie_bracket(element_1, element_2)*, яка приймає як аргументи два рядки, у яких зображено елементи алгебри, і повертає рядок, що зображує дужку Лі від цих елементів. Оскільки в програмі розглядаються дужки вигляду $\Big[\eta_{i_1}, \big[\eta_{i_2}, \ldots [\eta_{i_{k-1}}, \eta_{i_k}] \ldots \big]\Big]$, другий аргумент функції повинен бути словом. У зв'язку з тим, що в базисі Холла зустрічаються елементи вигляду $\Big[[a, b], \big[[a, b], b\big]\Big]$, в яких обидва аргументи не є словами, нам знадобиться функція, що може приймати як аргументи будь-які елементи. Далі функцію *get_basis_lie_elements(max_order)* можна замінити іншою, що перебиратиме пари елементів нижчих порядків, перевірятиме для дужки від них умови належності до базису Холла і, якщо вони виконуються, підраховуватиме та додаватиме нові елементи до базису. Зазначимо, що тепер для кожного елементу базису окрім рядку, що зображує його як лінійну комбінацію слів, доведеться зберігати посилання на елементи, з яких було утворено цей елемент, для перевірки їх впорядкованості.

Висновки

У роботі була розглянута керована система без зсуву, нелінійна за координатами та лінійна за керуванням.

Одним з підходів в дослідженні таких систем є застосування вільних алгебри Лі та алгебр Лі векторних полів. Їх алгебраїчні властивості можуть бути використані для визначення керованості та побудови однорідної апроксимації керованих систем без зсуву.

В роботі було наведено визначення вільних алгебр Лі, алгебр Лі векторних полів, дерев та базису Холла, пов'язаних з цим понять, декілька теорем та прикладів. Також в роботі було отримано формулу Вітта для розмірності вільної алгебри Лі, розглянуто алгоритм побудови базису Холла і запропоновано його використання для побудови однорідної апроксимації.

Список використаних джерел

[1] Birkhoff G. Representability of Lie algebras and Lie groups by matrices. *Annals of Mathematics*. 1937. V. 38. P. 526–532.

[2] Hall P. A contribution to the theory of groups of prime power order. *London Mathematical Society*. 1934. V. 36. P. 29–95.

[3] Witt E. Treue Darstellung Liescher Ringe. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. 1937. V. 177. P. 152–160.

[4] Hall M. A basis for free Lie rings and higher commutators in free groups. *American Mathematical Society*. 1950. V. 1, No.5. P. 575–581.

[5] Berstel J., Perrin D.P. The origins of combinatorics on words. *European Journal of Combinatorics*. 2007. V. 28. P. 996—1022.

[6] Humphreys J.E. Introduction to Lie Algebras and Representation Theory. *Springer-Verlag New York*. 1972.

[7] Lando S.K. Lectures on Generating Functions. *American Mathematical Society*. 2003.

[8] Melancon G. Combinatorics of Hall Trees and Hall Words. *Journal of combiantorial theoty*. 1997. Series A 59, 285-308

[9] Kawski M. The Combinatorics of Nonlinear Controllability and Noncommuting Flows. *Lectures given at the Summer School on Mathematical Control Theory Trieste*, 3-28 September 2001

[10] LaValle S. M. Planning Algorithms. *Cambridge University Press*. 2006.

[11] Sklyar G., Barkhayev P., Ignatovich S., Rusakov V. Implementation of the algorithm for constructing homogeneous approximations of nonlinear control systems. *Math. Control Signals Syst.* 2022. V. 34. P. 883-–907.

[12] Sklyar G., Barkhayev P., Ignatovich S. Construction of Fliess series and homogeneous approximations for nonlinear control systems. *Unpublished manuscript.*